

# Méth. Mat. Phys. - Chapitre 1

## Fonctions de Green



## 1.1 Distribution de Dirac

## 1.2 Fonctions de Green

## 1.3 Oscillateur harmonique forcé

- **Définition formelle** : distribution de Dirac

$$(1.1)$$

- **Condition de normalisation** : distribution de Dirac

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \quad (1.2)$$

- **Limites** : plus intuitives

- 1 **Suite de fonctions delta gaussiennes** :  $\sigma^2 = \frac{1}{n^2}$

$$\delta(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} n^2 x^2} \quad (1.3)$$

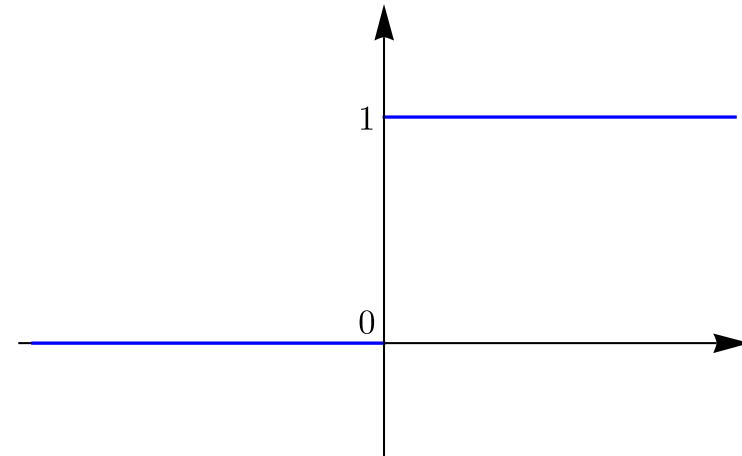
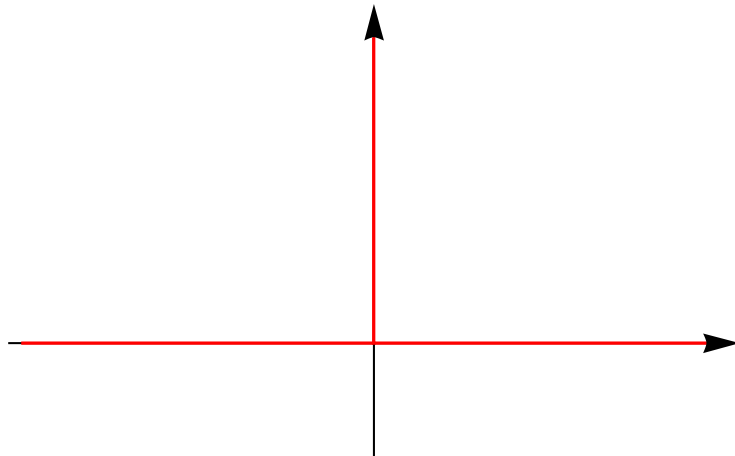
- 2 **Suite de fonctions delta sinus cardinals** :

$$\delta(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(nx)}{\pi x} \quad (1.4)$$

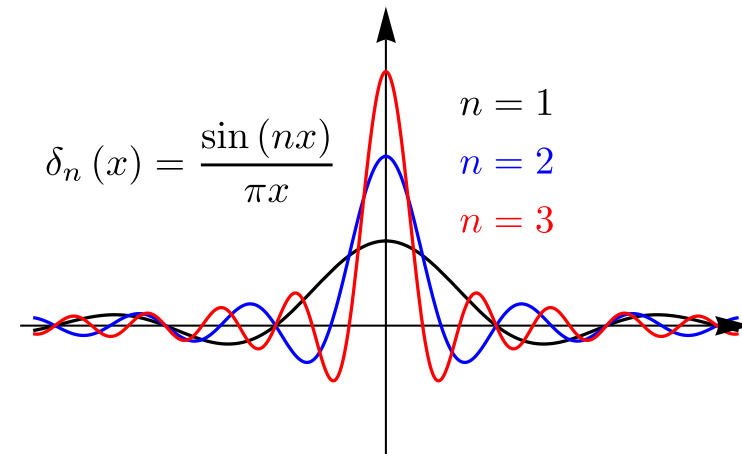
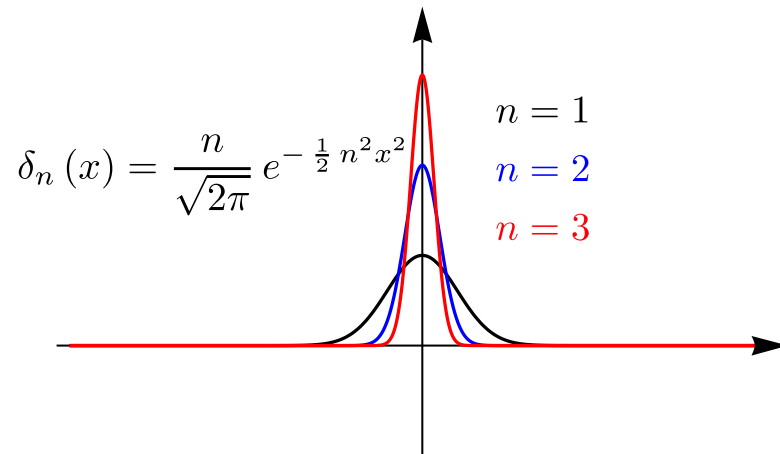
- **Fonction de Heaviside** : intégrale de la distribution de Dirac

$$(1.5)$$

- **Distribution de Dirac et fonction de Heaviside** :



- **Fonction delta gaussienne et fonction delta sinus cardinal** :



- **Propriétés : distribution de Dirac**

- ① **Translation : 1D**

$$\delta(x - x') = \begin{cases} \infty & \text{si } x = x' \\ 0 & \text{si } x \neq x' \end{cases} \quad (1.6)$$

- ② **Intégrale d'une fonction : 1D - unité  $[x^{-1}]$  et  $x \in [a, b] \subset \mathbb{R}$**

$$(1.7)$$

- ③ **Translation : 3D - représentation cartésienne**

$$\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \delta(x - x') \delta(y - y') \delta(z - z') \quad (1.8)$$

- ④ **Intégrale d'une fonction : 3D - unité  $[r^{-3}]$  et  $\mathbf{r} \in V \subset \mathbb{R}^3$**

$$(1.10)$$

- **Condition de normalisation** : distribution de Dirac

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^3r \quad (1.9)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x') dx \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y - y') dy \int_{-\infty}^{\infty} \delta(z - z') dz = 1$$

- **Equation différentielle** : 1D - opérateur linéaire inversible  $\mathcal{L}$

$$(1.11)$$

- **Equation différentielle** : fonction de Green

$$(1.14)$$

- **Solution** : produit de convolution : intégrale de la fonction de Green

$$(1.15)$$

- **Démonstration** : (1.7), (1.14) et (1.15) donne (1.16)  $\equiv$  (1.11)

$$\mathcal{L} g(x) = \int_a^b \mathcal{L} G(x - x') f(x') dx' = \int_a^b f(x') \delta(x - x') dx' = f(x) \quad \square$$

- **Equation différentielle** : 3D - opérateur linéaire inversible  $\mathcal{L}$

$$(1.17)$$

- **Equation de Green** : fonction de Green

$$(1.18)$$

- **Solution** : intégrale de la fonction de Green - superposition de sol. part.

$$(1.19)$$

- **Démonstration** : (1.16), (1.15) et (1.9)

$$\begin{aligned} \mathcal{L} g(\mathbf{r}) &= \iiint_V \mathcal{L} G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') f(\mathbf{r}') d^3 r' = \iiint_V f(\mathbf{r}') \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^3 r' \\ &= f(\mathbf{r}) \quad \square \end{aligned} \tag{1.20}$$

**① Equation de Green spatiale : 1D**

(1.21)

**② Equation de Green spatiale : 3D**

(1.22)

**③ Equation de Green temporelle : 1D**

(1.23)

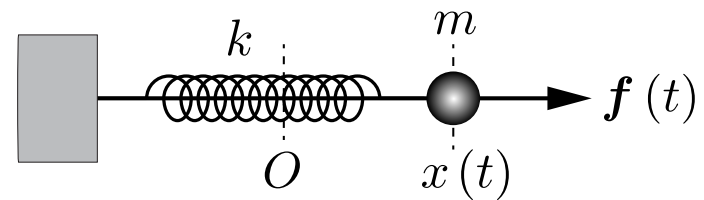
**④ Equation de Green spatio-temporelle : 2D**
$$\delta(t - t')$$
(1.24)**⑤ Equation de Green spatio-temporelle : 4D**

(1.25)

- **Oscillateur harmonique forcé :**

- masse :  $m$

- pulsation :  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  (1.28)



- **Equation du mouvement :** déformation  $x(t)$

(1.27)

- **Force ponctuelle :** au temps  $t = t'$

(1.29)

- **Solution ponctuelle :** déformation où  $f(t) = 0$  si  $t < t'$  et  $t > t'$

(1.30)

- **Intégrale du mouvement** :  $t \in [t' - \varepsilon, t' + \varepsilon]$  divisée par  $m$  (1.8)

$$\int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon} \left( \ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) \right) dt = v_0 \int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon} \delta(t - t') dt = v_0 \quad (1.32)$$

- **Continuité de la déformation** :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon} \omega_0^2 x(t) dt = 0 \quad (1.33)$$

- **Discontinuité de la vitesse de déformation** :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon} \ddot{x}(t) dt = v_0 \quad (1.34)$$

- **Intégrale du mouvement** : limite  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \dot{x}(t' + \varepsilon) - \dot{x}(t' - \varepsilon) \right) = v_0 \quad (1.35)$$

- **Conditions initiales sur la position et la vitesse** : lorsque  $t = t'$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(t' - \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(t' + \varepsilon) = 0 \quad (1.36)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \dot{x}(t' - \varepsilon) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \dot{x}(t' + \varepsilon) = v_0 \quad (1.37)$$

- **Déformation initiale** : (1.30)

$$x(t') = A(t') e^{i\omega_0 t'} + B(t') e^{-i\omega_0 t'} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(t' + \varepsilon) = 0 \quad (1.38)$$

- **Vitesse de déformation initiale** : dérivée temporelle de (1.30)

$$\dot{x}(t') = i\omega_0 \left( A(t') e^{i\omega_0 t'} - B(t') e^{-i\omega_0 t'} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \dot{x}(t' + \varepsilon) = v_0 \quad (1.39)$$

- **Coefficients** : (1.38) et (1.39)

$$A(t') = \frac{v_0}{2i\omega_0} e^{-i\omega_0 t'} \quad \text{et} \quad B(t') = -\frac{v_0}{2i\omega_0} e^{i\omega_0 t'} \quad (1.40)$$

- **Déformation** : force ponctuelle (1.31), (1.22) et (1.5) si  $t > t'$

$$(1.41)$$

où la fonction de Heaviside  $\Theta(t - t')$  assure la causalité.

- **Force ponctuelle** : au temps  $t = t'$

$$f(t) = m v_0 \delta(t - t') \quad (1.29)$$

- **Déformation** : force ponctuelle

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0(t - t')) \Theta(t - t') \quad (1.41)$$

- **Equation du mouvement** : (1.27) force ponctuelle (1.29)

$$\mathcal{L} x(t) = v_0 \delta(t - t') \quad (1.44)$$

- **Equation de Green** : (1.14)

$$\mathcal{L} G(t - t') = \left( \frac{d^2}{dt^2} + \omega_0^2 \right) G(t - t') = \delta(t - t') \quad (1.45)$$

- **Fonction de Green temporelle** : force ponctuelle (1.41) – (1.45)

$$(1.46)$$

- **Déformation** : force générale : produit de convolution (1.15)

$$(1.47)$$

- **Démonstration** : déformation force générale

$$\begin{aligned} \mathcal{L} x(t) &= \left( \frac{d^2}{dt^2} + \omega_0^2 \right) x(t) = \frac{1}{m} \int_0^t \left( \frac{d^2}{dt^2} + \omega_0^2 \right) G(t-t') f(t') dt' \\ &= \frac{1}{m} \int_0^t \delta(t-t') f(t') dt' = \frac{1}{m} f(t) \quad \square \end{aligned} \quad (1.48)$$

- **Fonction de Green temporelle** : causalité :  $\Theta(t-t')$

$$G(t-t') = \begin{cases} 0 & \text{si } t < t' \\ \frac{1}{\omega_0} \sin(\omega_0(t-t')) & \text{si } t > t' \end{cases} \quad (1.49)$$

- **Déformation** : solution force générale (causalité)

$$(1.50)$$

- Force périodique :

$$(1.51)$$

- **Déformation** : force périodique (1.51) dans (1.50)

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \frac{a_0}{\omega_0} \int_0^t \left( \frac{e^{i\omega_0(t-t')} - e^{-i\omega_0(t-t')}}{2i} \right) \left( \frac{e^{i\omega t'} - e^{-i\omega t'}}{2i} \right) dt' \\
 &= -\frac{a_0 e^{i\omega_0 t}}{4\omega_0} \int_0^t \left( e^{i(\omega-\omega_0)t'} - e^{-i(\omega+\omega_0)t'} \right) dt' \\
 &\quad - \frac{a_0 e^{-i\omega_0 t}}{4\omega_0} \int_0^t \left( e^{-i(\omega-\omega_0)t'} - e^{i(\omega+\omega_0)t'} \right) dt' \tag{1.52} \\
 &= \frac{a_0}{4\omega_0} e^{i\omega_0 t} \int_0^t \left( e^{-i(\omega+\omega_0)t'} - e^{i(\omega-\omega_0)t'} \right) dt' \\
 &\quad + \frac{a_0}{4\omega_0} \left( e^{i\omega_0 t} \int_0^t \left( e^{-i(\omega+\omega_0)t'} - e^{i(\omega-\omega_0)t'} \right) dt' \right)^*
 \end{aligned}$$

- **Déformation** : force périodique

$$x(t) = \frac{a_0}{2\omega_0} \operatorname{Re} \left( e^{i\omega_0 t} \int_0^t \left( e^{-i(\omega+\omega_0)t'} - e^{i(\omega-\omega_0)t'} \right) dt' \right) \quad (1.53)$$

- **Intégrale** :

$$\begin{aligned} \int_0^t \left( e^{-i(\omega+\omega_0)t'} - e^{i(\omega-\omega_0)t'} \right) dt' &= \frac{e^{-i(\omega+\omega_0)t'}}{-i(\omega+\omega_0)} \Big|_0^t - \frac{e^{i(\omega-\omega_0)t'}}{i(\omega-\omega_0)} \Big|_0^t \\ &= i \left( \frac{e^{-i(\omega+\omega_0)t} - 1}{\omega + \omega_0} \right) + i \left( \frac{e^{i(\omega-\omega_0)t} - 1}{\omega - \omega_0} \right) \end{aligned} \quad (1.54)$$

- **Déformation** : force périodique :  $\operatorname{Re} \left( i e^{\pm i\omega_* t} \right) = \mp \sin(\omega_* t)$  (1.56)

$$x(t) = \frac{a_0}{2\omega_0} \operatorname{Re} \left( i \left( \frac{e^{-i\omega t} - e^{i\omega_0 t}}{\omega + \omega_0} \right) + i \left( \frac{e^{i\omega t} - e^{i\omega_0 t}}{\omega - \omega_0} \right) \right) \quad (1.55)$$

$$(1.57)$$

**1 Repos : déformation nulle**

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} x(t) = 0 \quad (1.58)$$

**2 Pulsations voisines :  $\omega - \omega_0 \ll \omega + \omega_0$** 

$$x(t) \simeq -\frac{a_0}{2\omega_0} \frac{\sin(\omega t) - \sin(\omega_0 t)}{\omega - \omega_0} \quad (1.59)$$

**• Formule de trigonométrie :**

$$\sin(\omega t) - \sin(\omega_0 t) = \sin\left(\frac{\omega - \omega_0}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega + \omega_0}{2} t\right) \quad (1.60)$$

**• Battements : pulsations lente  $(\omega - \omega_0)/2$  et rapide  $(\omega + \omega_0)/2$** 

$$(1.61)$$

- **Battements** : enveloppe lente  $(\omega - \omega_0) / 2$  et oscillations internes rapides  $(\omega + \omega_0) / 2$

$$x(t) \simeq -\frac{a_0}{2\omega_0(\omega - \omega_0)} \sin\left(\frac{\omega - \omega_0}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega + \omega_0}{2}t\right) \quad (1.61)$$

